ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ $6^{η}$ ΔΕΚΑΔΑ

51.

α) Να γίνει γινόμενο παραγόντων η παράσταση $α^2β + αβ^2 – α – β$

β) Αν $α^2β + β^2α = α + β$, να δείξετε ότι οι αριθμοί α και β είναι ίσοι ή αντίθετοι.

Προτεινόμενη λύση

α)

$α^2β + αβ^2 – α – β = αβ(α + β) – (α + β) = (α + β)(αβ – 1)$

β)

$α^2β + β^2α = α + β$ άρα $α^2β + αβ^2 – α – β = 0$

Και με βάση το (α), $(α + β) (αβ – 1) = 0$ άρα

$α + β = 0$ ή $αβ – 1 = 0$

$α = – β$ ή $αβ = 1$

α , β αντίθετοι ή α , β αντίστροφοι

52.

Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x) = x^4– 4x^2$ και $Q(x) = 2x^3 – x^2– 8x + 4$

α) Να αναλύσετε τα πολυώνυμα σε γινόμενο παραγόντων.

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = Q(x)$

γ) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ορίζεται το κλάσμα $\frac{P(x)}{Q(x)}$ και να το απλοποιήσετε.

Προτεινόμενη λύση

α)

$P(x) = x^4– 4x^2 = x^2(x^2 – 4) = x^2 (x–2)(x + 2)$

$Q(x) = 2x^3 – x^2– 8x + 4 = x^2(2x –1) – 4(2x–1) =$

$= (2x –1)(x^2 – 4) =$

$= (2x –1)(x–2)(x + 2)$

β)

$P(x) = Q(x)$ άρα $x^4– 4x^2 =2x^3 – x^2– 8x + 4$ και με βάση το (α)

$x^2 (x – 2)(x + 2) = (2x – 1)(x – 2)(x + 2)$

$x^2 (x – 2)(x + 2) – (2x – 1)(x – 2)(x + 2) = 0$

$(x – 2)(x + 2)[x^2 – (2x –1)] = 0$

$(x – 2)(x + 2)(x^2 – 2x +1) = 0$

$(x – 2)(x + 2)(x – 1)^2 = 0$ οπότε $x – 2 = 0$ άρα $x = 2$ ή

$x + 2 = 0$ άρα $x = – 2$ ή

$x –1 = 0$ άρα $x = 1$

γ)

Θα πρέπει $Q(x) \neq 0$ άρα $(2x – 1)(x – 2)(x + 2) \neq 0$ οπότε $2x –1 \neq 0$ άρα $x \neq \frac{1}{2}$ και

$x – 2 \neq 0$ άρα $x \neq 2$ και

$x + 2 \neq 0$ άρα $x \neq –2$

Το κλάσμα γίνεται $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^2(x-2)(x+2)}{(2x-1)(x-2)(x+2)} = \frac{x^2}{2x-1}$

53.

Έστω $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης και τα ενδεχόμενα $A = \{1, 2, 4\}$ και $B = \{2, 3, 4, 5\}$. Επιλέγουμε από το Ω ένα στοιχείο στην τύχη. Να βρείτε τις πιθανότητες

$P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$, $P(A \cup B)$, $P(A')$, $P(B')$

Προτεινόμενη λύση

$P(A) = \dfrac{N(A)}{N(\Omega)} = \dfrac{3}{5}$, $\quad P(B) = \dfrac{N(B)}{N(\Omega)} = \dfrac{4}{5}$

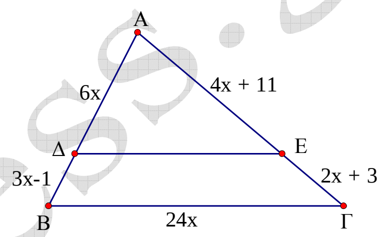
$A \cap B = \{2, 4\}$ άρα $P(A \cap B) = \dfrac{N(A \cap B)}{N(\Omega)} = \dfrac{2}{5}$

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ άρα $P(A \cup B) = \dfrac{N(A \cup B)}{N(\Omega)} = \dfrac{5}{5} = 1$

$A' = \{3, 5\}$ και $B' = \{1\}$ οπότε $P(A') = \dfrac{N(A')}{N(\Omega)} = \dfrac{2}{5}$ και $P(B') = \dfrac{N(B')}{N(\Omega)} = \dfrac{1}{5}$

54 .

Στο διπλανό σχήμα είναι ΔΕ // ΒΓ, ΑΔ = 6x , ΑΕ = 4x + 11 , ΒΔ= 3x – 1, ΓΕ =2x + 3 και ΒΓ = 24x



α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι όμοια.

β) Να υπολογίσετε τα μήκη των πλευρών των δύο τριγώνων.

Προτεινόμενη λύση

α)

Αφού ΔΕ // ΒΓ, είναι $\hat{B} = \hat{\Delta}$ ως εντός εκτός επί τα αυτά.

Τα τρίγωνα έχουν και $\hat{A} = \hat{A}$, άρα είναι όμοια.

β)

Επειδή απέναντι από ίσες γωνίες βρίσκονται ομόλογες πλευρές η αναλογία των ομολόγων πλευρών είναι η $\dfrac{AB}{A\Delta} = \dfrac{A\Gamma}{AE} = \dfrac{B\Gamma}{\Delta E}$

Όμως $AB = A\Delta + \Delta B = 6x + 3x - 1 = 9x - 1$

$A\Gamma = AE + E\Gamma = 4x + 11 + 2x + 3 = 6x + 14$

Η αναλογία γίνεται $\dfrac{9x-1}{6x} = \dfrac{6x+14}{4x+11} = \dfrac{24x}{\Delta E}$ **(1)**

Η (1) δίνει $\dfrac{9x-1}{6x} = \dfrac{6x+14}{4x+11}$ άρα $(9x-1)(4x+11) = 6x(6x+14)$

$36x^2 + 99x - 4x - 11 = 36x^2 + 84x$

$11x = 11$

$x = 1$

Οπότε $AB = 9 - 1 = 8$, $A\Gamma = 6 + 14 = 20$, $A\Delta = 6$, $AE = 4 + 11 = 15$, $B\Gamma = 24$

Η (1) δίνει $\dfrac{9x-1}{6x} = \dfrac{24x}{\Delta E}$ άρα $\dfrac{8}{6} = \dfrac{24}{\Delta E}$ άρα $\Delta E = 18$

55.

α) Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} \dfrac{3x+1}{5}-\dfrac{y+2}{3}=1 \\ \dfrac{2x-3}{2}-\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{5}{6} \end{cases}$

β) Αν $x = 3$ και $y =1$ είναι λύση του συστήματος, να βρείτε την τιμή του κ ώστε η ευθεία $(3κ + 1)x - 2y = κ - 2$ να διέρχεται από το σημείο $(3, 1)$

Προτεινόμενη λύση

α)

$$\begin{cases} \dfrac{3x+1}{5}-\dfrac{y+2}{3}=1 \\ \dfrac{2x-3}{2}-\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{5}{6} \end{cases} \quad \text{άρα} \quad \begin{cases} 15\cdot\dfrac{3x+1}{5}-15\cdot\dfrac{y+2}{3}=1\cdot 15 \\ 6\cdot\dfrac{2x-3}{2}-6\cdot\dfrac{y+1}{3}=6\cdot\dfrac{5}{6} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3\cdot(3x+1)-5\cdot(y+2)=15 \\ 3\cdot(2x-3)-2\cdot(y+1)=5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9x+3-5y-10=15 \\ 6x-9-2y-2=5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9x-5y=22 \\ 6x-2y=16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9x-5y=22 \\ 3x-y=8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9x-5y=22 & \cdot\ 1 \\ 3x-y=8 & \cdot -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9x-5y=22 \\ -15x+5y=-40 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -6x=-18 \\ 3x-y=8 \end{cases} \quad \text{άρα} \quad \begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$$

β)

Θα πρέπει να ισχύει $(3κ + 1)\cdot 3 - 2\cdot 1 = κ - 2$

$9κ + 3 - 2 = κ - 2$

$κ = -\dfrac{3}{8}$

56.

Δίνονται οι παραστάσεις

$A = \alpha(\alpha - 4) + (\alpha - \beta)^2 - 3(2\beta - 3) - \alpha^2$ και

$B = (\beta - 1)^2 - \beta(\beta - 6 - 2\alpha) - 4(\beta - 1) - 1$

α) Να γίνουν οι πράξεις στις παραστάσεις Α και Β

β) Αν Α + Β = 0 να βρείτε τις τιμές των α και β

Προτεινόμενη λύση

α)

$$A = \alpha(\alpha - 4) + (\alpha - \beta)^2 - 3(2\beta - 3) - \alpha^2 = \alpha^2 - 4\alpha + \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 - 6\beta + 9 - \alpha^2 =$$
$$= \alpha^2 - 4\alpha - 2\alpha\beta + \beta^2 - 6\beta + 9$$

$$B = (\beta - 1)^2 - \beta(\beta - 6 - 2\alpha) - 4(\beta - 1) - 1 = \beta^2 - 2\beta + 1 - \beta^2 + 6\beta + 2\alpha\beta - 4\beta + 4 - 1 =$$
$$= 2\alpha\beta + 4$$

β)

$A + B = 0$ άρα $\alpha^2 - 4\alpha - 2\alpha\beta + \beta^2 - 6\beta + 9 + 2\alpha\beta + 4 = 0$

$\alpha^2 - 4\alpha + \beta^2 - 6\beta + 9 + 4 = 0$

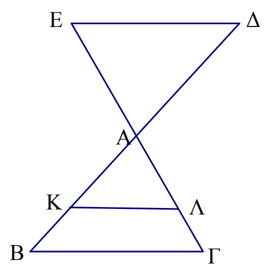
$(\alpha^2 - 4\alpha + 4) + (\beta^2 - 6\beta + 9) = 0$

$(\alpha - 2)^2 + (\beta - 3)^2 = 0$

$\alpha - 2 = 0$ και $\beta - 3 = 0$

$\alpha = 2$ και $\beta = 3$

57.



Στο διπλανό σχήμα είναι ΑΒ = ΑΔ , ΑΓ = ΑΕ και ΚΛ // ΒΓ. Δείξτε ότι

α) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι ίσα

β) $\hat{E} = \hat{\Gamma}$

γ) Τα τρίγωνα ΑΚΛ και ΑΔΕ είναι όμοια

Προτεινόμενη λύση

α)

ΑΒ = ΑΔ υπόθεση , ΑΓ = ΑΕ υπόθεση , και $B\hat{A}\Gamma = E\hat{A}\Delta$ ως κατακορυφήν.
Οπότε με βάση το κριτήριο (Π – Γ – Π), τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι ίσα.

β)

Από την ισότητα των προηγουμένων τριγώνων είναι $\hat{E} = \hat{\Gamma}$ ως αντίστοιχες γωνίες .

γ)

Επειδή ΚΛ // ΒΓ, είναι $\hat{\Gamma} = \hat{\Lambda}$ ως εντός εκτός .

Και επειδή $\hat{E} = \hat{\Gamma}$, θα είναι $\hat{\Lambda} = \hat{E}$

Δεδομένου ότι ακόμα έχουμε $B\hat{A}\Gamma = E\hat{A}\Delta$, τα τρίγωνα ΑΚΛ και ΑΔΕ είναι όμοια , αφού έχουν δύο γωνίες τους ίσες.

58.

Να βρεθούν οι κοινές λύσεις των ανισώσεων.

α) $4(x+4)+x+1>2(4x-5)$ και $6(x-11)\le 4(x-2)-3(x+1)$

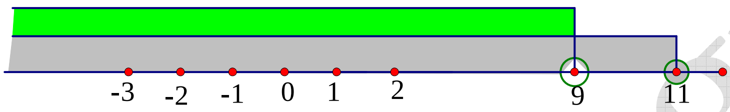
β) $x-7<1+2x$ και $2x-6<3x+4$ και $-9-2x\ge 3x-18$

Προτεινόμενη λύση

α)

$$\begin{aligned}
4(x+4)+x+1 &> 2(4x-5) &\quad \text{και} \quad 6(x-11) &\le 4(x-2)-3(x+1)\\
4x+16+x+1 &> 8x-10 &\quad \text{και} \quad 6x-66 &\le 4x-8-3x-3\\
-3x &> -27 &\quad \text{και} \quad 5x &\le 55\\
x &< 9 &\quad \text{και} \quad x &\le 11
\end{aligned}$$

Παράσταση λύσεων στην ευθεία των αριθμών



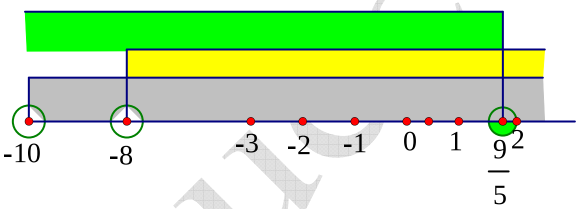
Από τον παραπάνω άξονα βλέπουμε ότι κοινές λύσεις των δύο ανισώσεων είναι οι

$$x<9$$

β)

$$\begin{aligned}
x-7 &< 1+2x &\quad \text{και} \quad 2x-6 &< 3x+4 &\quad \text{και} \quad -9-2x &\ge 3x-18\\
-x &< 8 &\quad \text{και} \quad -x &< 10 &\quad \text{και} \quad -5x &\ge -9\\
x &> -8 &\quad \text{και} \quad x &> -10 &\quad \text{και} \quad x &\le \frac{9}{5}
\end{aligned}$$

Παράσταση λύσεων στην ευθεία των αριθμών



από τον παραπάνω άξονα βλέπουμε ότι κοινές λύσεις των ανισώσεων είναι οι

$$-8<x\le \frac{9}{5}$$

59.

Δίνονται τα πολυώνυμα $Q(x)=(x-1)^3-x(x-2)^2+3x-7$ και
$P(x)=x(x-2)^2(x+4)-x^2(x-2)(x+4)^2$

α) Να δείξτε ότι $Q(x)=x^2+2x-8$

β) Να αναλύσετε τα $Q(x)$ και $P(x)$ σε γινόμενο παραγόντων

γ) Να λύσετε τις εξισώσεις $Q(x)=0$ και $P(x)=0$

δ) Να απλοποιήσετε το κλάσμα $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ καθορίζοντας και τις τιμές του x για τις οποίες ορίζεται.

Προτεινόμενη λύση

α)

$$\begin{aligned}
Q(x) = (x-1)^3-x(x-2)^2+3x-7 &= x^3-3x^2+3x-1-x(x^2-4x+4)+3x-7 =\\
&= x^3-3x^2+3x-1-x^3+4x^2-4x+3x-7 =\\
&= x^2+2x-8
\end{aligned}$$

β)
Το $Q(x)$ έχει $\Delta = 36$ και ρίζες $x = -4$ ή $x = 2$.
Επομένως με βάση γνωστό τύπο γίνεται $Q(x) = 1(x+4)(x-2) = (x+4)(x-2)$

$$\begin{aligned} P(x) = x(x-2)^2(x+4) - x^2(x-2)(x+4)^2 &= x(x-2)(x+4)\,[(x-2) - x(x+4)] = \\ &= x(x-2)(x+4)\,(x-2-x^2-4x) = \\ &= x(x-2)(x+4)\,(-x^2-3x-2) = \\ &= -x(x-2)(x+4)\,(x^2+3x+2) = \\ &= -x(x-2)(x+4)\,(x+1)(x+2) \end{aligned}$$

γ)

$$\begin{aligned} Q(x) = 0 \text{ άρα } & (x+4)(x-2) = 0 \\ & x+4 = 0 \text{ ή } x-2 = 0 \\ & x = -4 \text{ ή } x = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(x) = 0 \text{ άρα } & -x(x-2)(x+4)(x+1)(x+2) = 0 \\ & x = 0 \text{ ή } x-2 = 0 \text{ ή } x+4 = 0 \text{ ή } x+1 = 0 \text{ ή } x+2 = 0 \\ & x = 0 \text{ ή } x = 2 \text{ ή } x = -4 \text{ ή } x = -1 \text{ ή } x = -2 \end{aligned}$$

δ)
Για να ορίζεται το κλάσμα θα πρέπει $Q(x) \neq 0$ άρα $x \neq -4$ και $x \neq 2$

Τότε $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{-x(x-2)(x+4)(x+1)(x+2)}{(x+4)(x-2)} = -x(x+1)(x+2)$

60 .

Από τα 100 παιδιά της Γ΄ τάξης ενός Γυμνασίου άλλα επέλεξαν να πάνε σινεμά και άλλα θέατρο. Τα 44 από τα 60 αγόρια επέλεξαν να πάνε σινεμά , ενώ 22 από τα κορίτσια επέλεξαν να πάνε θέατρο .

	Αγόρια	Κορίτσια
Σινεμά		
Θέατρο		

α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα
β) Επιλέγουμε ένα παιδί στην τύχη .
Να βρείτε την πιθανότητα :
i) Να είναι κορίτσι
ii) Να έχει επιλέξει να πάει σινεμά
iii) Να είναι αγόρι και να έχει επιλέξει να πάει θέατρο

Προτεινόμενη λύση

α)
Συμπληρωμένος ο πίνακας φαίνεται δίπλα

	Αγόρια	Κορίτσια
Σινεμά	44	18
Θέατρο	16	22

β)
i . Τα κορίτσια είναι 40 οπότε, αν Κ είναι το ενδεχόμενο το παιδί είναι κορίτσι , τότε $P(K) = \dfrac{N(K)}{N(\Omega)} = \dfrac{40}{100} = 40\%$

ii. Τα παιδιά που επέλεξαν να πάνε σινεμά είναι $44 + 18 = 62$
Οπότε , αν Σ είναι το ενδεχόμενο το παιδί επέλεξε σινεμά,
τότε $P(\Sigma) = \dfrac{N(\Sigma)}{N(\Omega)} = \dfrac{62}{100} = 62\%$

iii. Τα αγόρια που επέλεξαν θέατρο είναι 16
Οπότε , αν Θ είναι το ενδεχόμενο το παιδί είναι αγόρι και επέλεξε θέατρο, τότε
$P(\Theta) = \dfrac{N(\Theta)}{N(\Omega)} = \dfrac{16}{100} = 16\%$